$F_X(x) \overset{o\rho}{=} P(X \le x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα (συνέχεια από προηγούμενο μάθημα)

1) τ.μ $X$ τιμές $x = -3, -1, 1, 3$

$P(X=-3) = P(X=3) = \frac{1}{8}$

$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{3}{8}$

$F_X = ?$ , γραφική παράσταση

Λύση

$F_X(x) \overset{o\rho}{=} P(X \le x) \ \forall x \in \mathbb{R} = P\left(\begin{matrix}\text{όλων των τιμών} \\ \text{της τ.μ } X \text{ που} \\ \text{είναι } \le x\end{matrix}\right)$

Έστω $x < -3$ : $F_X(x) = P(X \le x) = P(\emptyset) = 0$

Έστω $-3 \le x < -1$ : $F_X(x) \overset{o\rho}{=} P(X \le x) = P(X=-3) = \frac{1}{8}$

Έστω $-1 \le x \le 1$ : $F_X(x) \overset{o\rho}{=} P(X \le x) = P(X=-3 \text{ ή } X=-1) =$

$= P(X=-3) + P(X=-1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$

Έστω $1 \le x \le 3$ : $F_X(x) \overset{o\rho}{=} P(X \le x) = P(X=-3 \text{ ή } X=-1 \text{ ή } X=1) =$

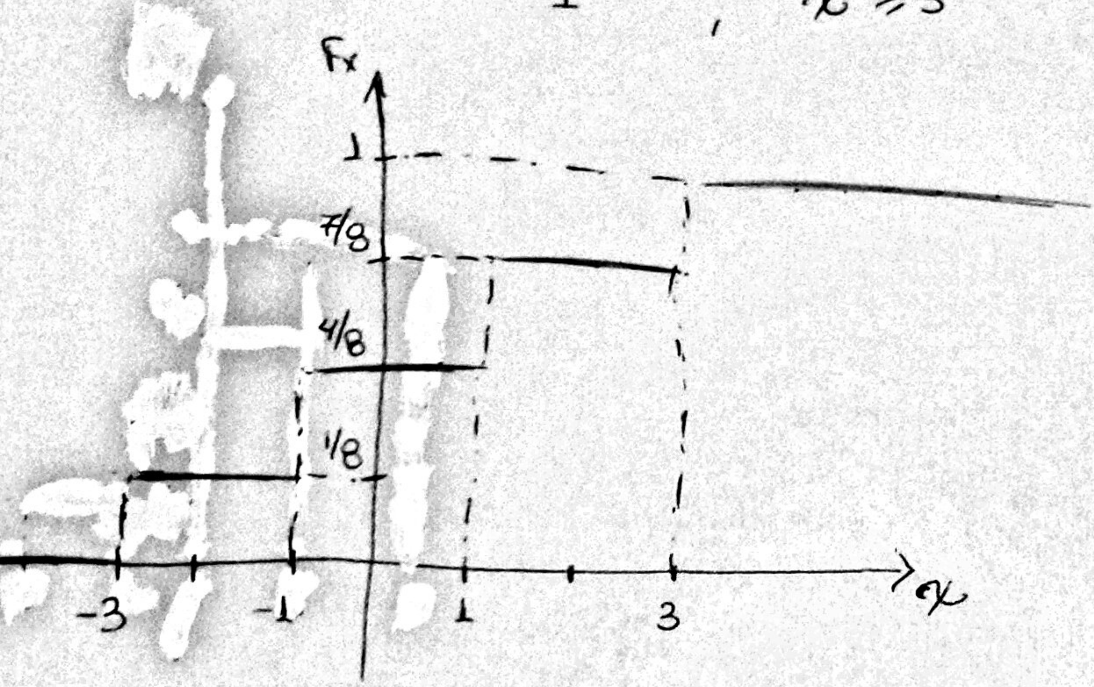
$= P(X=-3) + P(X=-1) + P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

Έστω $x \ge 3$ : $F_X(x) \overset{o\rho}{=} P(X \le x) = P(X=-3 \text{ ή } X=-1 \text{ ή } X=1 \text{ ή } X=3) =$

$= P(X=-3) + P(X=-1) + P(X=1) + P(X=3) =$

$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

Άρα $F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<-3 \\ \frac{1}{8}, & -3\le x<-1 \\ \frac{4}{8}, & -1\le x<1 \\ \frac{7}{8}, & 1\le x\le 3 \\ 1, & x\geq 3 \end{cases}$




2) τ.μ X με τιμές $x=-1, 1, 2, 3$

$P(X=-1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$

$P(X=2)=\frac{1}{6}$

$P(X=3)=\frac{1}{3}$

$F_X=?$ , γραφική παράσταση

Λύση

Αν $x<-1$ : $F_X(x)=P(X\le x)=P(\emptyset)=0$

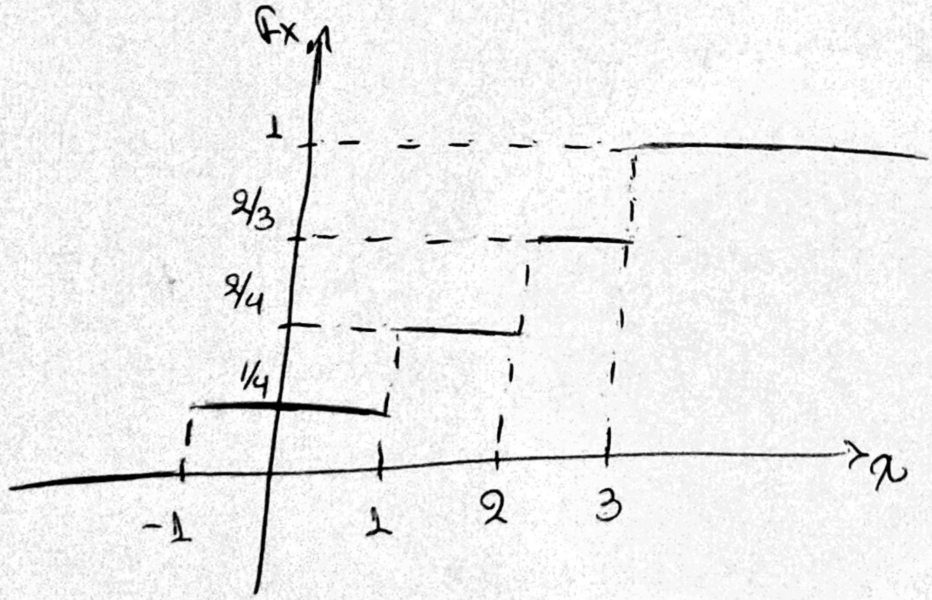
Αν $-1\le x<1$ : $F_X(x)=P(X\le x)=P(X=-1)=\frac{1}{4}$

Αν $1 \le x < 2$ : $F_X(x) = P(X \le x) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{2}{4}$

Αν $2 \le x < 3$ : $F_X(x) = P(X \le x) = P(X=-1) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{2}{3}$

Αν $x \geq 3$ : $F_X(x) = P(X \le x) = P(X=-1) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$

Άρα
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{1}{4} & , -1 \le x < 1 \\ \frac{2}{4} & , 1 \le x < 2 \\ \frac{2}{3} & , 2 \le x < 3 \\ 1 & , x \geq 3 \end{cases}$$




ΠΡΟΤΑΣΗ (Ιδιότητες α.σ.κ)

Έστω $F_X$ η α.σ.κ μιας τ.μ $X$. Τότε

α) Η $F_X$ είναι αύξουσα

β) Η $F_X$ είναι συνεχής από δεξιά

$$\lim_{x \to a^+} F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=\!=} \lim_{n \to \infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = F_X(a)$$

γ) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Αναγκαίες συνθήκες ώστε μια πραγματική συνάρτηση να είναι α.σ.κ

Αποδειξη

α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \leq y$

Αρκεί νδο $F_X(x) \leq F_X(y)$

$$\left.\begin{array}{l} F_X(x) \overset{\text{op}}{=} P(X \leq x) \\ \{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\} \end{array}\right\} \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y) \overset{\text{op}}{=} F_X(y)$$

Παραδειγμα

Έστω οι πραγματικές συναρτήσεις

α) $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$

Εκθετική κατανομή

β) $F_X(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ $x \in \mathbb{R}$

Κατανομή Logistic

Είναι οι $F_X$ α.σ.κ?

Λύση

Για να είναι αρκεί να ισχύουν οι ιδιότητες α, β, γ

α. Με παραγώγους αποδεικνύω ότι είναι αύξουσες

β. Και οι 2 είναι συνεχείς άρα και συνεχείς από δεξιά

γ. Αν πάω να βρω τα όρια στο $-\infty$ και $+\infty$ θα δω ότι ισχύουν

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω τ.μ $X$ με α.σ.κ $F_X$. Τότε αν $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύουν

1) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

2) $P(X < b) = F_X(b-) \overset{\text{op}}{=} \lim\limits_{n \to \infty} F_X\left(b - \frac{1}{n}\right)$

3) $P(X=b) = F_X(b) - F_X(b-)$

4) $P(X>b) = 1 - F_X(b)$

5) $P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a-)$

6) $P(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a)$

7) $P(a \le X < b) = F_X(b-) - F_X(a-)$

**Απόδειξη**

ξένα (ασυμβίβαστα)

1. $\{X \le b\} = \{a < X \le b\} \cup \{X \le a\}$

$$P(X \le b) = P(\{a < X \le b\} \cup \{X \le a\}) = P(a < X \le b) + P(X \le a)$$

**Παρατήρηση**

Αν $a, b$ είναι σημεία συνέχειας της $F_X$ τότε:

$$P(X=a) \overset{(3)}{=} F_X(a) - F_X(a-) = 0$$

$$P(X<b) \overset{(2)}{=} F_X(b-) = F_X(b)$$

$$P(a < X \le b) = P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

**Παράδειγμα**

Έστω τ.μ. $X$ με α.σ.κ

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x^2 & , 0 \le x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & , \frac{1}{3} \le x < 2 \\ \frac{x-1}{4} & , 2 \le x < 3 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

(Να αποδείξω ότι είναι α.σ.κ)

Να υπολογιστούν: $P(\frac{1}{3} < x \leq 3) = ?$

$P(x = \frac{1}{3}) = ?$

$P(x = 2) = ?$

$P(1 \leq x \leq \frac{5}{2}) = ?$

$P(x < \frac{1}{3}) = ?$

$P(x = 3) = ?$

<u>Λύση</u>

$P(\frac{1}{3} < x \leq 3) \overset{(1)}{=} F_x(3) - F_x(\frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(x = \frac{1}{3}) \overset{(3)}{=} F_x(\frac{1}{3}) - F_x(\frac{1}{3}-) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$

$P(x = 2) \overset{(3)}{=} F_x(2) - F_x(2-) = \frac{2-1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ (Αναμενόμενο αφού το 2 είναι σημείο συνέχειας)

$P(1 \leq x \leq \frac{5}{2}) \overset{(5)}{=} F_x(\frac{5}{2}) - F_x(1-) = \frac{(\frac{5}{2})-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\frac{3}{2}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$

$P(x < \frac{1}{3}) \overset{(2)}{=} F_x(\frac{1}{3}-) = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$

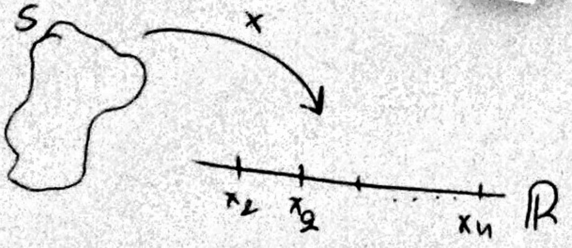
$P(x = 3) \overset{(3)}{=} F_x(3) - F_x(3-) = 1 - \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$

## Διακριτή τ.μ. - Συνάρτηση Πιθανοτήτων (σ.π)

Ανάλογα με το σύνολο τιμών οι τ.μ. διακρίνονται
$\begin{cases} \text{διακριτές τ.μ} \\ \text{συνεχείς τ.μ} \end{cases}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια μεταβλητή θα ονομάζεται διακριτή αν το σύνολο τιμών της $S_X$ είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο



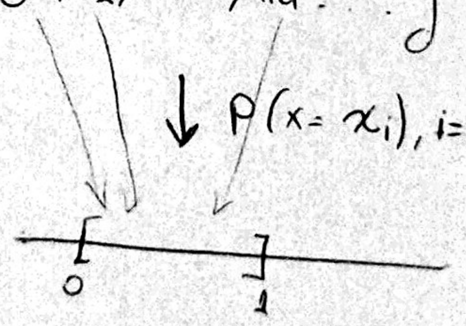

$S_X=\{x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots\}$

Έχει νόημα για μια διακριτή τ.μ. X να αναζητώ την πιθανότητα μιας συγκεκριμένης της τιμής? ή Αν $S_X=\{x_1, \dots, x_\nu, \dots\}$ έχει νόημα η $P(X=x_i)$ $i=1, \dots, \nu, \dots$

ΝΑΙ

Αν X διακριτή με $S_X=\{x_1, x_2, \dots, x_\nu \dots\}$

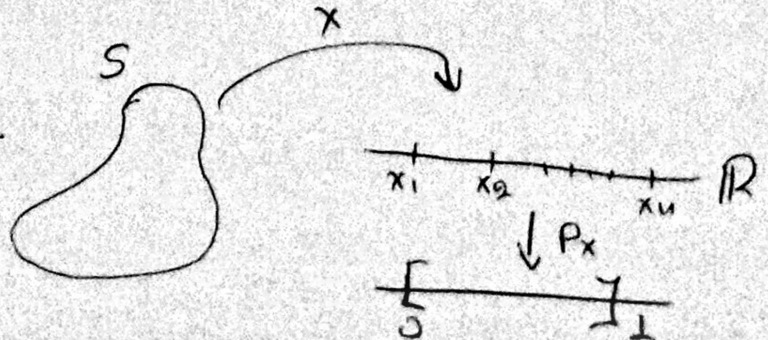
Συνάρτηση Πιθανότητας → $\downarrow P(X=x_i), i=1, 2, \dots, \nu, \dots$




ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X διακριτή τ.μ με σύνολο τιμών $S_X=\{x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots\}$
Ονομάζουμε συνάρτηση πιθανότητας (σ.π) μια συνάρτηση $p_X : S_X \to [0,1]$ με τύπο $p_X(x_i) = P(X=x_i)$ $i=1, 2, \dots \nu$

Σχηματικά



Παράδειγμα

Νόμισμα $\longrightarrow P(K) = \frac{3}{8}$ ρίχνεται μέχρι να εμφανιστεί Κ ή 3 Γ

Να προσδιοριστεί η σ.π του αριθμού των απαιτούμενων ρίψεω[ν] και η α.σ.κ του.

Λύση

Έστω Χ πλήθος απαιτούμενων ρίψεων. Το Χ είναι τ.μ και ζητώ σ.π και α.σ.κ. Τιμές Χ? Εξαρτάται από το τι θα συμβεί δηλ. από S

$$S = \{K, ΓK, ΓΓK, ΓΓΓ\}$$

Τιμές Χ $\quad x = 1, 2, 3$

$$P_x(1) \overset{op}{=} P(X=1) = P(K) = \frac{3}{8}$$

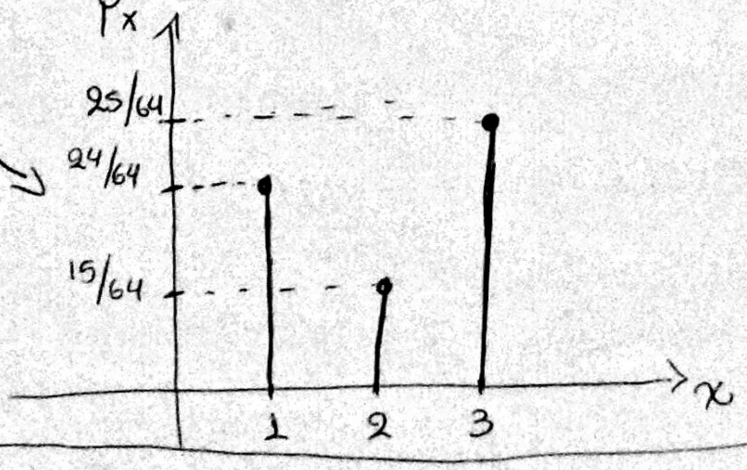
$$P_x(2) = P(X=2) = P(ΓK) = P(Γ)P(K) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$$

$$P_x(3) = P(X=3) = P(ΓΓK \text{ ή } ΓΓΓ) = P(ΓΓK) + P(ΓΓΓ) =$$

$$= P(Γ) \cdot P(Γ) \cdot P(K) + P(Γ) \cdot P(Γ) \cdot P(Γ) = \frac{25}{64}$$

Άρα η σ.π είναι $P_x(x) = \begin{cases} 3/8 = 24/64, & x=1 \\ 15/64, & x=2 \\ 25/64, & x=3 \end{cases}$

ραβδόγραμμα




$$f_x(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ \frac{24}{64}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{39}{64}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Να βρω σπίτι $F_x$ και πρέπει